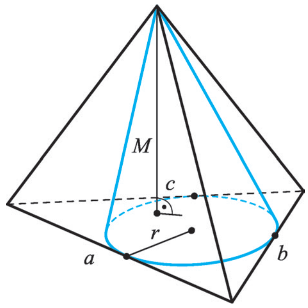
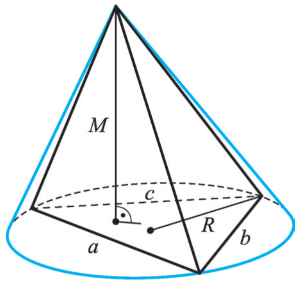
2182/I.



2182/II.



2181. Az R sugarú körbe írható szabályos nyolcszög területe: $T_{\text{nyolcszög}} = 8\dfrac{R^2 \cdot \sin 45°}{2} =$ $= 2\sqrt{2}\,R^2$. A gúla térfogata: $V_{\text{gúla}} = \dfrac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot R^2 \cdot M$. A kúp térfogata: $V_{\text{kúp}} = \dfrac{1}{3} R^2 \pi \cdot M$. A térfogatok különbsége: $\Delta V = \dfrac{R^2 M}{3}\left(\pi - 2\sqrt{2}\right) = \underline{\underline{6\left(\pi - 2\sqrt{2}\right) \approx 1{,}88\ \text{dm}^3}}$.

2182. 1. eset: a beleírható kúp. A gúla alaplapjának területe Heron-képlettel: $T_{\text{alap}} = \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)} = 240\ \text{cm}^2$. A gúla alaplapjának területe a beírt kör sugarával és a háromszög oldalaival: $T_{\text{alap}} = rs \Rightarrow r = \dfrac{T_{\text{alap}}}{s} = 6\ \text{cm}$. A beleírható kúp térfogata: $V_{1.\ \text{kúp}} =$ $= \dfrac{1}{3} r^2 \pi \cdot M = \underline{\underline{432\pi \approx 1357\ \text{cm}^3}}$.

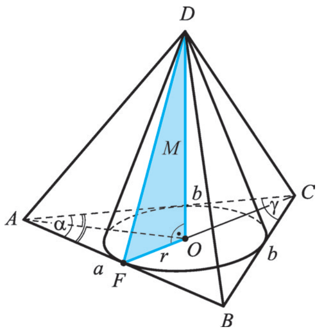
2. eset: a köré írható kúp. A gúla alaplapjának területe a körülírt kör sugarával és a háromszög oldalaival: $T_{\text{alap}} = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow R = \dfrac{abc}{4T_{\text{alap}}} = 17\ \text{cm}$. A köré írható kúp térfogata: $V_{2.\ \text{kúp}} = \dfrac{1}{3} R^2 \pi \cdot M \approx$ $\approx 3468\pi \approx \underline{\underline{10\,895\ \text{cm}^3}}$.

2183. 1. eset: a köré írható kúp. A szabályos tizenkétszög köré írható kör sugara: $R = \dfrac{a}{2\sin 15°} \approx \underline{\underline{23{,}18\ \text{cm}}}$. A gúla köré írható kúp térfogata: $V_{1.\ \text{kúp}} = \dfrac{1}{3} R^2 \pi \cdot M \approx 3941\pi \approx$ $\approx \underline{\underline{12\,381{,}16\ \text{cm}^3}}$.

2. eset: a beleírható kúp. A szabályos tizenkétszög beírható körének sugara: $r = \dfrac{a}{2\,\text{tg}\,15°} \approx$ $\approx \underline{\underline{22{,}39\ \text{cm}}}$. A gúlába írható kúp térfogata: $V_{2.\ \text{kúp}} = \dfrac{1}{3} r^2 \pi \cdot M \approx 3677\pi \approx \underline{\underline{11\,551{,}78\ \text{cm}^3}}$.

2184. A gúla szabályos hatszög alaplapjának beírt köre a kúp alapköre. A szabályos hatszög alapú gúla térfogata: $V_{\text{gúla}} = \dfrac{1}{3} \cdot 6 \cdot \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot M = \underline{\underline{\dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}}} \cdot M$. A kúp alapkörének sugara a hatszög egy középponti háromszögének magassága: $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

2186.



A kúp térfogata: $V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot M = \frac{a^2\pi}{4} \cdot M$.

A hulladék térfogata: $V_{\text{hulladék}} = V_{\text{gúla}} - V_{\text{kúp}}$. $\frac{V_{\text{hulladék}}}{V_{\text{gúla}}} =$

$= 1 - \frac{V_{\text{kúp}}}{V_{\text{gúla}}} = 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{6-\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}093}}$.

2185. A gúla alapéle: $a = R\sqrt{2}$. A gúla fedőéle: $b = r\sqrt{2}$.

$V_{\text{csonkagúla}} = \frac{m}{3}\left[\left(\sqrt{2}\,R\right)^2 + \sqrt{2}\,R \cdot \sqrt{2}\,r + \left(\sqrt{2}\,r\right)^2\right] =$

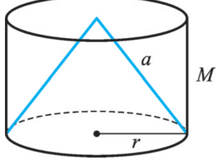
$= \underline{\underline{\frac{2m}{3}(R^2 + Rr + r^2)}}$.

2186. Az ábra szerinti jelölésekkel: $\alpha = 58°$, $\gamma = 180° - 2 \cdot 58° = 64°$. $r = \frac{a}{2} \cdot \text{tg } 29°$ és $\frac{a}{2} =$ $= b \cdot \cos 58° \Rightarrow \underline{\underline{r = b \cdot \cos 58° \text{ tg } 29°}}$. A gúla alaplapjának területe: $T_{\text{alap}} = \frac{b^2 \cdot \sin 64°}{2}$. A gúla térfogata: $V_{\text{gúla}} = \frac{b^2 \cdot M \cdot \sin 64°}{6}$. A kúp térfogata: $V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} b^2 \text{ tg}^2\, 29° \cdot \cos^2 58° \cdot \pi \cdot M$. A két térfogat aránya: $\frac{V_{\text{kúp}}}{V_{\text{gúla}}} = \frac{2 \text{ tg}^2\, 29° \cdot \cos^2 58° \cdot \pi}{\sin 64°}$. Az adatokat behelyettesítve: $V_{\text{kúp}} \approx$ $\approx \underline{\underline{405{,}09 \text{ m}^3}}$.

2187. A kúp alapköre a gúla alaplapjának körülírt köre $\Rightarrow$ a négyzet oldala: $a = R\sqrt{2}$. A tengelymetszet háromszögből $M = R\sqrt{3}$. $V_{\text{gúla}} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2}\,R\right)^2 R\sqrt{3} = \underline{\underline{18\sqrt{3} \approx 31{,}17 \text{ cm}^3}}$. Az oldallap háromszögből $m = \sqrt{4R^2 - \frac{R^2}{2}} = R\sqrt{\frac{7}{2}}$. $A_{\text{gúla}} = \left(\sqrt{2}\,R\right)^2 + 4 \cdot \frac{R\sqrt{2} \cdot R \cdot \sqrt{\frac{7}{2}}}{2} =$ $= 2R^2\left(1 + \sqrt{7}\right) \approx \underline{\underline{65{,}62 \text{ cm}^2}}$.

2188. Tekintsük a 2186. ábrát! $a = b$, $r = 7$ cm, $M = 6$ cm. A kúp alapköre a gúla alap háromszögének beírt köre. A szabályos háromszög beírt körének sugara a magasság harmada. $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow a = 14\sqrt{3}$ cm. *FOD* derékszögű háromszögben: $m = \sqrt{85}$ cm. $t_{ABD} = 7 \cdot \sqrt{255} \approx$ $\approx \underline{\underline{111{,}78 \text{ cm}^2}}$.

2189.

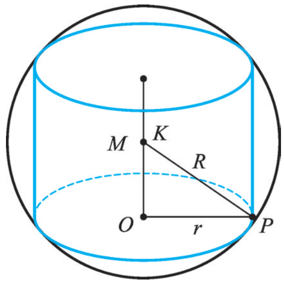


2189. A feladat feltétele szerint: $2r\pi \cdot M = r\pi a \Rightarrow a = 2M$. Pitagorasz-tételből: $M^2 + r^2 = a^2$.

A kettőt összevetve: $M = \underline{\underline{\frac{r\sqrt{3}}{3}}}$.

2190. A feltétel szerint: $2r\pi \cdot M = 3r^2\pi \Rightarrow M = \frac{3}{2}r$. Pitagorasz-tétel a KOP derékszögű háromszögre: $R^2 = \frac{M^2}{4} + r^2$. A kettőt összevetve: $r = \frac{4}{5}R$ és $M = \frac{6}{5}R$ adódik. A henger térfogata: $V_{\text{henger}} = r^2\pi \cdot M = \frac{16}{25}R^2\pi \cdot \frac{6}{5}R = \underline{\underline{\frac{96}{125}R^3\pi}}$.

2190.



2191. Jelölje a henger sugarát r, a gömb sugarát R. A feltétel szerint a henger magassága $2r$.

$A_{\text{henger}} = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot 2r = \underline{\underline{6r^2\pi}}$. $A_{\text{gömb}} = \underline{\underline{4R^2\pi}}$. $\Rightarrow \frac{r}{R} = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

$V_{\text{henger}} = r^2\pi \cdot 2r = \underline{\underline{2r^3\pi}}$. $V_{\text{gömb}} = \underline{\underline{\frac{4R^3\pi}{3}}}$. $\frac{V_{\text{henger}}}{V_{\text{gömb}}} = \frac{2r^3\pi}{\frac{4R^3\pi}{3}} = \underline{\underline{\frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{5}} \approx 0{,}3795}}$.

2192. Tekintsük a 2190. ábrát. A feltétel szerint: $2r\pi \cdot M = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \pi \Rightarrow r = \frac{1}{4M}$. Pitagorasz-tételből: $R^2 = r^2 + \frac{M^2}{4}$. A kettőt összevetve: $1 = \frac{1}{16M^2} + \frac{M^2}{4} \Rightarrow 4M^4 - 16M^2 + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ két megoldás van: $M_1 = \underline{\underline{\sqrt{\frac{4+\sqrt{15}}{2}}}}$ és $M_2 = \underline{\underline{\sqrt{\frac{4-\sqrt{15}}{2}}}}$.

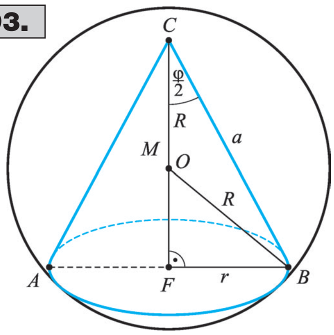
2193. Tekintsük a gömb és a beírt kúp tengelymetszetét: $\varphi = 56{,}7°$. A gömb térfogatából a gömb sugara: $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \approx \underline{\underline{3{,}08\ \text{cm}}}$. Az ABC egyenlő szárú háromszögben: $2r = 2R\ \sin 56{,}7° \Rightarrow$

$\Rightarrow r \approx \underline{\underline{2{,}57\ \text{cm}}}$. A CFB derékszögű háromszögben: $\operatorname{tg} 28{,}35° = \frac{r}{M} \Rightarrow M \approx \underline{\underline{4{,}77\ \text{cm}}}$. A kúp térfogata: $V = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot M \approx \underline{\underline{33{,}02\ \text{cm}^3}}$.

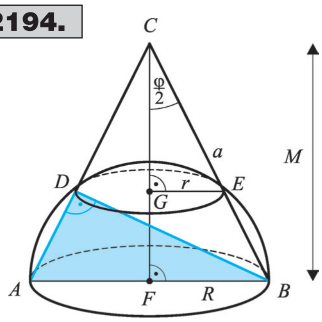
2194. $M = 2R$. Pitagorasz-tétel a $CFB\Delta$-re: $a^2 = R^2 + 4R^2 \Rightarrow a = R \cdot \sqrt{5}$. $A_{\text{félgömb}} = 2R^2 \cdot \pi$.

$T_{\text{palást}} = R \cdot \pi \cdot a = R \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{5} = R^2 \cdot \pi \cdot \sqrt{5}$. $\underline{\underline{\frac{A_{\text{félgömb}}}{T_{\text{palást}}}}} = \frac{2R^2\pi}{R^2\pi\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{5}}{5}}}$.

2193.



2194.



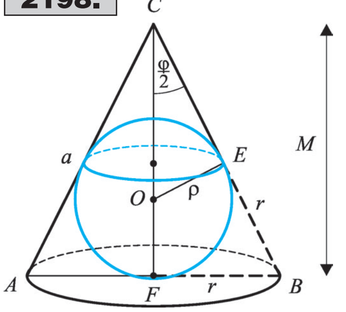
2195. Tekintsük a 2194. ábrát. $M = 2R$. A Thalész-tétel miatt $ADB\sphericalangle = 90° \Rightarrow DB$ az ABC egyenlő szárú háromszög szárhoz tartozó magassága. Az $ABC\triangle$ szára az AFC derékszögű háromszögből: $AC = \sqrt{R^2 + 4R^2} = R\sqrt{5}$. Az $ABC\triangle$ területe: $R \cdot 2R = R\sqrt{5} \cdot \frac{BD}{2} \Rightarrow BD = \frac{4R\sqrt{5}}{5}$. Pitagorasz-tétel az ABD derékszögű háromszögre: $AD = \sqrt{4R^2 - \frac{16R^2}{5}} = \frac{2R\sqrt{5}}{5} \Rightarrow CD = AC - AD = R \cdot \sqrt{5} - \frac{2}{5} \cdot R \cdot \sqrt{5} = \frac{3}{5} \cdot R \cdot \sqrt{5}$. $DEC\triangle \sim ABC\triangle$, mert szögeik egyállású szögek. $\lambda = \frac{CD}{CA} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{\frac{3}{5} \cdot R \cdot \sqrt{5}}{R \cdot \sqrt{5}} = \frac{r}{R} \Rightarrow \underline{\underline{r = \frac{3}{5} \cdot R}}$.

2196. Tekintsük a 2194. ábrát. $M = 2R$ feltételt felhasználva az $AFC\triangle$-re felírt Pitagorasz-tételben: $AC = \sqrt{4R^2 + R^2} = R\sqrt{5}$. A Thalész-tétel miatt az $ADB\sphericalangle = 90°$. $ABD\triangle \sim ACF\triangle$, mert A-nál levő szögük közös, és mindkettő derékszögű. $\Rightarrow \lambda_1 = AB : AC = AD : AF \Rightarrow \frac{2R}{R\sqrt{5}} = \frac{AD}{R} \Rightarrow AD = \frac{2R\sqrt{5}}{5} \Rightarrow DC = AC - AD = R\sqrt{5} - \frac{2R\sqrt{5}}{5} = \frac{3R\sqrt{5}}{5}$. A gömb által levágott kúp C középpontra vonatkozóan hasonló az eredetihez. A hasonlóság aránya: $\lambda_2 = DC : AC = \frac{3R\sqrt{5}}{5} : R\sqrt{5} = \frac{3}{5}$. A két kúppalást területének aránya: $\frac{t}{T} = \lambda_2^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow$ $\Rightarrow t = \frac{9}{25}T$. A gömb belsejében levő palástrész területe: $T - t = T - \frac{9}{25}T = \frac{16}{25}T$. A keresett arány: $\underline{\underline{t : (T - t) = 9 : 16}}$.

2197. Tekintsük a 2193. ábrát! $\varphi = 45°$. A gömb felszínéből a sugara: $R = \sqrt{\frac{1000}{4\pi}} \approx \underline{\underline{8{,}92\ \text{cm}}}$. $ABC\triangle$-ből $2r = 2R \sin 45° \Rightarrow r \approx \underline{\underline{6{,}31\ \text{cm}}}$. BFC derékszögű háromszögből: $\text{tg}\ 225° = \frac{r}{M} \Rightarrow$ $\Rightarrow M \approx \underline{\underline{15{,}23\ \text{cm}}}$. A kúp térfogata: $V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot M \approx \underline{\underline{634{,}96\ \text{cm}^2}}$.

2198. Tekintsük a kúp és a beírt gömb tengelymetszetét! Pitagorasz-tétel az AFC derékszögű háromszögre: $a^2 = 3{,}69^2 + 8^2 \Rightarrow \underline{\underline{a = 8{,}81\ \text{dm}}}$. Az $ABC\triangle$ területe: $(a + r) \cdot \varrho = r \cdot M \Rightarrow (8{,}81 + 3{,}69)\,\varrho = 3{,}69 \cdot 8 \Rightarrow \underline{\underline{\varrho \approx 2{,}36\ \text{dm}}}$. $A_{\text{gömb}} = 4 \cdot \varrho^2 \cdot \pi \approx \underline{\underline{70{,}08\ \text{dm}^2}}$.

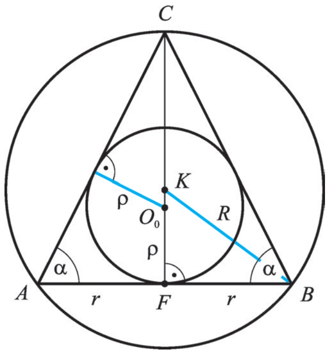
2198.



2199. Tekintsük a 2198. ábrát. A feladat feltétele: $\frac{2}{3} r\pi a = 4\varrho^2 \pi \Rightarrow ra = 6\varrho^2$ (1). A kúp magassága a Pitagorasz-tételt felhasználva: $M = \sqrt{a^2 - r^2}$. A tengelymetszet területe: $r \cdot M = (a + r) \cdot \varrho \Rightarrow r \cdot \sqrt{a^2 - r^2} = (a + r) \cdot \varrho \Rightarrow a = \frac{r(r^2 + \varrho^2)}{r^2 - \varrho^2}$. a-t (1)-be helyettesítve:

$r \cdot \dfrac{r(r^2 + \varrho^2)}{r^2 - \varrho^2} = 6\varrho^2 \Rightarrow 6\varrho^4 - 5r^2\varrho^2 + r^4 = 0 \Rightarrow \varrho_1 = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$, $\varrho_2 = \dfrac{r}{\sqrt{3}}$. Két megoldás van. Az egyik esetben a gömb sugara $\underline{\underline{\dfrac{r}{\sqrt{2}}}}$, az alkotó $3r$, a másikban a sugár $\underline{\underline{\dfrac{r}{\sqrt{3}}}}$ és az alkotó $2r$.

2200.



2200. A három test közös tengelymetszete alapján: $r = 2$ m, $\alpha = 54°$. ABC egyenlőszárú háromszögben: $ACB\sphericalangle = 72°$; $2r = 2R \cdot \sin 72° \Rightarrow R \approx \underline{\underline{2{,}1\ \text{m}}}$. $CFB\triangle$-ben: $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{CF}{r} \Rightarrow$ $\Rightarrow CF \approx \underline{\underline{2{,}75\ \text{m}}}$. $\cos \alpha = \dfrac{r}{CB} \Rightarrow CB \approx \underline{\underline{3{,}4\ \text{m}}}$. Az $ABC\triangle$ területe: $(CB + r) \cdot \varrho = CF \cdot r \Rightarrow \varrho \approx \underline{\underline{1{,}02\ \text{m}}}$.

2201. Tekintsük a 2193. ábrát. $R = 12$ cm, $a = 32$ cm. CFB derékszögű háromszögből: $\sin \varphi = \dfrac{r}{a} = \dfrac{3}{8} \Rightarrow \varphi = 22{,}02° \Rightarrow 2\varphi = 44{,}04°$. ABC egyenlő szárú háromszögből:

$2r = 2R \cdot \sin 44{,}04° \Rightarrow R = 17{,}26$ cm. $V_{\text{gömb}} = \dfrac{4R^3\pi}{3} \approx 21\,536{,}47\ \text{cm}^3 \approx \underline{\underline{21{,}54\ \text{dm}^3}}$.

2202. A 2198. ábra jelöléseivel: A kúp egyenlő oldalú $\Rightarrow$ $ABC\triangle$ szabályos $\Rightarrow$ $\Rightarrow \varrho = \dfrac{M}{3} = \underline{\underline{4\ \text{cm}}}$. $V_{\text{gömb}} = \dfrac{4\varrho^3\pi}{3} = \dfrac{4 \cdot 4^3 \cdot \pi}{3}\ \text{cm}^3 \approx \underline{\underline{268{,}08\ \text{cm}^3}}$.

2203. A 2193. ábra jelöléseit használjuk. Feltétel: $r \cdot \pi \cdot a = \sqrt{5} \cdot r^2\pi \Rightarrow a = \sqrt{5} \cdot r$. OFB derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel: $R^2 = (M - R)^2 + r^2 \Rightarrow M^2 - 2MR + r^2 = 0$ (1). CFB derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel: $a^2 = M^2 + r^2 \Rightarrow 5r^2 = M^2 + r^2 \Rightarrow r = \dfrac{M}{2}$.

$r^2 \to$ (1)-be: $M^2 - 2MR + \dfrac{M^2}{4} = 0 \Rightarrow M = \dfrac{8}{5}R$. $r = \dfrac{4}{5}R$. $V_{\text{kúp}} = \dfrac{1}{3} \cdot r^2\pi \cdot M = \underline{\underline{\dfrac{128}{375}}} \cdot R^3\pi$.

2204. Vizsgáljuk a kúp tengelymetszetét (például a 2193. ábra CFB háromszögében $a = 2r$). Pitagorasz-tétel a CFB derékszögű háromszögre: $M^2 = 4r^2 - r^2 \Rightarrow M = r \cdot \sqrt{3}$.

$A_{\text{kúp}} = r^2\pi + r \cdot \pi \cdot 2r = \underline{\underline{3r^2\pi}}$, $A_{\text{gömb}} = 4r^2\pi \Rightarrow \dfrac{A_{\text{kúp}}}{A_{\text{gömb}}} = \dfrac{3r^2\pi}{4r^2\pi} = \underline{\underline{\dfrac{3}{4}}}$. $V_{\text{kúp}} = \dfrac{1}{3} \cdot r^2\pi \cdot r \cdot \sqrt{3} =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} r^3\pi, \quad V_{\text{gömb}} = \frac{4}{3} r^3\pi \Rightarrow \frac{V_{\text{kúp}}}{V_{\text{gömb}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} r^3\pi}{\frac{4}{3} r^3\pi} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{4}}}.$$

2205. Pitagorasz-tétel a 2193. ábra CFB háromszögére: $M^2 = 4r^2 - r^2 \Rightarrow M = r\sqrt{3}$. $A_{\text{kúp}} = r^2\pi + r\pi \cdot 2r = 3r^2\pi$, $A_{\text{gömb}} = 4R^2\pi$. A feltétel szerint $3r^2\pi = 4R^2\pi \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{3}}{2} r$.

$V_{kúp} = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot M = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot r\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} r^3\pi.$ $\quad V_{gömb} = \frac{4R^3\pi}{3} = \frac{4\cdot 3\cdot \sqrt{3}\cdot r^3\pi}{3\cdot 8} = \frac{\sqrt{3}}{2} r^3\pi.$

$$\frac{V_{kúp}}{V_{gömb}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} r^3\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2} r^3\pi} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}.$$

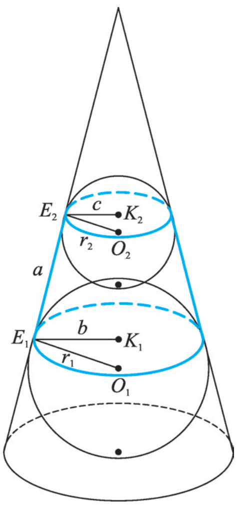
2206. Tekintsük a 2198. ábrát $\Rightarrow a = 2r$. A kúp egyenlő oldalú $\Rightarrow ABC\triangle$ szabályos $\Rightarrow$ $\Rightarrow \varrho = \frac{M}{3} = \frac{r\sqrt{3}}{3}$. $A_{kúp} = r^2\pi + r\pi \cdot 2r = 3r^2\pi$; $A_{gömb} = 4\varrho^2\pi = 4\frac{r^2}{3}\pi$. $\frac{A_{kúp}}{A_{gömb}} = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$.

$V_{kúp} = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot r\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} r^3\pi$. $V_{gömb} = \frac{4}{3}\varrho^3\pi = \frac{4\sqrt{3}}{27} r^3\pi$. $\frac{V_{kúp}}{V_{gömb}} = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$.

2207. **1. eset:** a gömb köré írt kúp. A 2198. ábra jelöléseit használjuk $\Rightarrow a = 2r,\ M = r\sqrt{3}$.
A kúp egyenlő oldalú $\Rightarrow ABC\triangle$ szabályos $\Rightarrow \varrho = \frac{M}{3} = \frac{r\sqrt{3}}{3}$. $A_{kúp1} = r^2\pi + r\pi \cdot 2r = 3r^2\pi$;
$A_{gömb} = 4\varrho^2\pi = 4\frac{r^2}{3}\pi$. $\frac{A_{kúp1}}{A_{gömb}} = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$. $V_{kúp} = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot r\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} r^3\pi$. $V_{gömb} = \frac{4}{3}\varrho^3\pi =$
$= \frac{4\sqrt{3}}{27} r^3\pi$. $\frac{V_{kúp1}}{V_{gömb}} = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$.

2. eset: a gömbbe írt kúp. A 2193. ábra jelöléseit használjuk $\Rightarrow a = 2r,\ M = r\sqrt{3}$. A kúp egyenlő oldalú $\Rightarrow ABC\triangle$ szabályos $\Rightarrow R = \frac{2M}{3} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$. $A_{kúp2} = r^2\pi + r\pi \cdot 2r = 3r^2\pi$;

2208/I.



$A_{gömb} = 4R^2\pi = = \frac{16}{3} r^2\pi. \Rightarrow \frac{A_{gömb}}{A_{kúp2}} = \underline{\underline{\frac{16}{9}}}$.

$V_{kúp2} = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot r\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} r^3\pi$. $V_{gömb} = \frac{4}{3} R^3\pi = \frac{4}{3}\cdot\frac{8r^3}{3\sqrt{3}}\pi =$
$= \frac{32\sqrt{3}}{27} r^3\pi. \Rightarrow \frac{V_{gömb}}{V_{kúp2}} = \underline{\underline{\frac{32}{9}}}$.

$A_{kúp1} = \frac{9}{4} A_{gömb} = \frac{9}{4}\cdot\frac{16}{9} A_{kúp2} = 4A_{kúp2}. \Rightarrow$

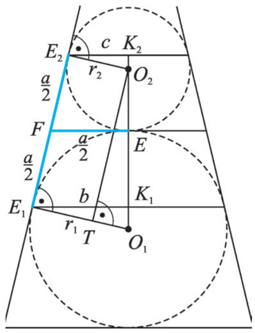
$\Rightarrow A_{kúp1} : A_{gömb} : A_{kúp2} = = 4 : \frac{16}{9} : 1 = \underline{\underline{36 : 16 : 9}}$.

$V_{kúp1} = \frac{9}{4} V_{gömb} = \frac{9}{4}\cdot\frac{32}{9} V_{kúp2} = 8V_{kúp2}. \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{kúp1} : V_{gömb} : V_{kúp2} = 8 : \frac{32}{9} : 1 = \underline{\underline{72 : 32 : 9}}$.

2208. A csonkakúp palástjának területe: $T_{palást} = \frac{(2b + 2c)a\pi}{2} =$ $= a\pi(b + c)$. Tekintsük a gömbök és a kúp tengelymetszetét. $FE = FE_1 = FE_2$, mert külső pontból húzott érintőszakaszok. FE

2208/II.



a trapéz középvonalának fele, ezért $FE = \frac{b+c}{2} = \frac{a}{2}$. Pitagorasz tétele az O_1TO_2 derékszögű háromszögre: $a^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow a^2 = 4r_1r_2$. $T_{\text{palást}} = a\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot 2 = a^2\pi = 4r_1r_2\pi = \underline{\underline{160\pi \approx 502{,}65\ \text{cm}^2}}$.

2209. Tekintsük a 2198. ábrát. $OEC\triangle \sim BFC\triangle$, mert C-nél levő szögük közös és mindkettő derékszögű $\Rightarrow \lambda = \frac{\varrho}{r} = \frac{M-\varrho}{a} = \frac{a-r}{M} \Rightarrow M = \frac{80}{3}$ cm és $a = \frac{100}{3}$ cm. $A_{\text{kúp}} = r^2\pi + r\pi a \approx \underline{\underline{33{,}51\ \text{dm}^2}}$. $V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot M = \approx \underline{\underline{11{,}17\ \text{dm}^3}}$.

2210. Tekintsük a 2198. ábrát. Az $ABC\triangle$ területe: $r \cdot M = (a+r)\cdot\varrho \Rightarrow 72r = (a+r)\cdot 12 \Rightarrow \underline{\underline{a = 5r}}$. Pitagorasz-tétel az FBC derékszögű háromszögre: $a^2 = r^2 + M^2 \Rightarrow 25r^2 = r^2 + 72^2 \Rightarrow \underline{\underline{r = 6\sqrt{6}}}$ és $\underline{\underline{a = 30\sqrt{6}}}$. $A_{\text{kúp}} = r^2\pi + r\pi a = 1296\pi \approx 4071{,}5\ \text{cm}^2 \approx \underline{\underline{40{,}71\ \text{dm}^2}}$.

2211. Tekintsük a 2198. ábrát. $\frac{A_{\text{kúp}}}{A_{\text{gömb}}} = k \Rightarrow \frac{r^2\pi + r\pi a}{4\varrho^2\pi} = k \Rightarrow r(r+a) = 4k\varrho^2$ (*). Az $ABC\triangle$ területe: $rM = (r+a)\varrho \Rightarrow M = \frac{r+a}{r}\varrho$. Pitagorasz-tétel az FBC derékszögű háromszögre: $a^2 = M^2 + r^2 \Rightarrow a^2 = \frac{(r+a)^2}{r^2}\varrho^2 + r^2 \Rightarrow a^2r^2 = (r+a)^2\varrho^2 + r^4$. A (*) egyenletből $r \cdot a = 4k\cdot\varrho^2 - r^2$, illetve $r + a = \frac{4k\cdot\varrho^2}{r}$ összefüggéseket a Pitagorasz-tételbe helyettesítve: $8k\varrho^2 \cdot r^4 - 16k^2\varrho^4 \cdot r^2 + 16k^2\varrho^6 = 0$ „r”-ben negyedfokú egyenlethez jutunk. Ennek megoldásai: $r_1 = \varrho\sqrt{k + \sqrt{k(k-2)}}$ vagy $r_2 = \varrho\sqrt{k - \sqrt{k(k-2)}}$, ha $k \geq 2$.

2212. Tekintsük a 2198. ábrát. $\frac{V_{\text{kúp}}}{V_{\text{gömb}}} = k \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}r^2\pi \cdot M}{\frac{4}{3}\varrho^3\pi} = k \Rightarrow M = \frac{4k\cdot\varrho^3}{r^2}$ (*). Az $ABC\triangle$ területe: $rM = (r+a)\varrho \Rightarrow M = \frac{r+a}{r}\varrho$. M-et (*)-ba beírva: $r^2 \cdot \frac{r+a}{r} \cdot \varrho = 4k\cdot\varrho^3 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = \frac{4k\cdot\varrho^2 - r^2}{r}$. Pitagorasz-tétel az FBC derékszögű háromszögre: $a^2 = r^2 + M^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(\frac{4k\cdot\varrho^2 - r^2}{r}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{4k\cdot\varrho^3}{r^2}\right)^2$. Ennek egyszerűbb alakra hozásából a $8k\varrho^2 \cdot r^4 - 16k^2\varrho^4 \cdot r^2 + 16k^2\varrho^6 = 0$ „r”-ben negyedfokú egyenlethez jutunk. Ennek megoldásai: $r_1 = \varrho\sqrt{k + \sqrt{k(k-2)}}$ vagy $r_2 = \varrho\sqrt{k - \sqrt{k(k-2)}}$, ha $k \geq 2$.

2213. A 2194. ábra jelöléseit alkalmazzuk: $\dfrac{A_{\text{kúp}}}{A_{\text{félgömb}}} = \dfrac{r^2\pi + r\pi a}{r^2\pi + 2r^2\pi} = \dfrac{r^2\pi + r\pi a}{3r^2\pi} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{a}{3r}$.

II

A feltétel szerint $\dfrac{1}{3} + \dfrac{a}{3r} = \dfrac{18}{5} \Rightarrow \dfrac{r}{a} = \dfrac{5}{49}$. $\sin\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{r}{a} = \dfrac{5}{49} \Rightarrow \varphi = \underline{\underline{11,72°}}$.

2214. Tekintsük a 2198. ábrát. $\dfrac{A_{\text{gömb}}}{T_{\text{alap}}} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \dfrac{4\varrho^2\pi}{r^2\pi} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\varrho = \dfrac{\sqrt{3}}{3}r}}$. CFB derékszögű háromszögben $FBC\sphericalangle = 90° - \dfrac{\varphi}{2}$. OB felezi az $FBC\sphericalangle$-et $\Rightarrow FBO\sphericalangle = 45° - \dfrac{\varphi}{4}$. OFB derékszögű háromszögben $\operatorname{tg}\left(45° - \dfrac{\varphi}{4}\right) = \dfrac{\varrho}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi = 60°}}$.

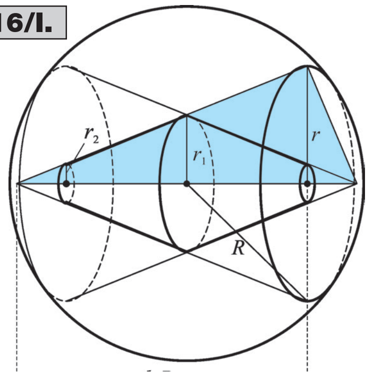
2215. Tekintsük a 2198. ábrát. $A_{\text{kúp}} = n \cdot A_{\text{gömb}} \Rightarrow r^2\pi + r\pi a = n \cdot 4\varrho^2\pi \Rightarrow \underline{\underline{r^2 + ra = 4n\varrho^2}}$ (*).
Az $ABC\triangle$ területe: $r \cdot M = \varrho(r + a) \Rightarrow$ mindkét oldal r-rel való szorzása után $r^2M = \varrho \cdot (r^2 + ra)$.
A (*) összefüggést felhasználva: $r^2M = \varrho \cdot 4n\varrho^2 = 4n\varrho^3 \Rightarrow \dfrac{1}{3}r^2\pi \cdot M = \dfrac{4}{3}\varrho^3\pi \cdot n \Rightarrow \underline{\underline{V_{\text{kúp}} = V_{\text{gömb}} \cdot n}}$.

2216. A kúpok közös része egy kettős csonkakúp. A két kúp síkszimmetrikus a gömb középpontján átmenő, a kúpok közös tengelyére merőleges síkra. $\Rightarrow$ A közös részt alkotó két csonkakúp közös alapköre ebben a síkban van, középpontja azonos a gömb középpontjával. $ACB\sphericalangle = 90°$ a Thalész-tétel miatt. $BT_2 = AT = k \cdot R$ a feltétel miatt $\Rightarrow AT_2 = TB = 2R - kR = (2 - k)R$. Magasságtétel az ACB derékszögű háromszög TC magasságára:
$r = \sqrt{k \cdot R \cdot (2 - k) \cdot R} = R\sqrt{k(2 - k)}$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét a $CAB\sphericalangle$ r_2, r_1 és r szelőire: $\dfrac{r_2}{r} = \dfrac{AT_2}{AT} = \dfrac{(2 - k)R}{kR} = \dfrac{2 - k}{k} \Rightarrow \underline{\underline{r_2 = R(2 - k)\sqrt{\dfrac{2 - k}{k}}}}$.

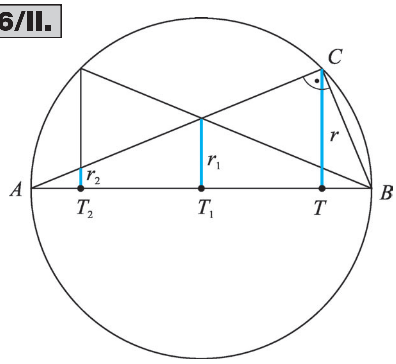
$\dfrac{r_1}{r} = \dfrac{AT_1}{AT} = \dfrac{R}{kR} = \dfrac{1}{k} \Rightarrow \underline{\underline{r_1 = R\sqrt{\dfrac{2 - k}{k}}}}$.

A két kúp közös részének térfogata: $V_{\text{közös}} = 2V_{\text{csonkakúp}} = 2\dfrac{(k - 1) \cdot R \cdot \pi}{3}(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) =$
$= 2\dfrac{(k - 1) \cdot R \cdot \pi}{3}\left(R^2\dfrac{2 - k}{k} + R^2(2 - k)\dfrac{2 - k}{k} + R^2(2 - k)^2\dfrac{2 - k}{k}\right) =$

2216/I.

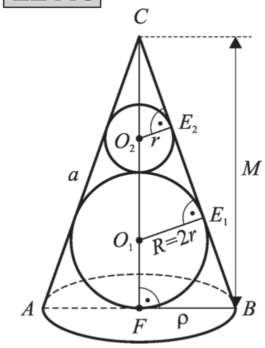


2216/II.



$= \dfrac{2(k-1)(2-k)R^3\pi}{3k}(7-5k+k^2)$. A közös rész és a gömb térfogatának hányadosa: $\dfrac{V_{\text{közös}}}{V_{\text{gömb}}} = \underline{\underline{\dfrac{(k-1)(2-k)(7-5k+k^2)}{2k}}}$.

2217.



2217. A gömbök térfogatának aránya a sugarak arányának köbe $\Rightarrow \left(\dfrac{r}{R}\right)^3 = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \underline{\underline{2r = R}}$. O_2E_2 középvonal az $O_1E_1C\triangle$-ben: $CO_2 = O_2O_1 = r + 2r = 3r \Rightarrow M = FO_1 + O_1O_2 + O_2C =$ $= 2r + 3r + 3r = 8r$. $CO_2E_2\triangle \sim CFB\triangle$, mert mindkettő derékszögű és C-nél levő szögük közös. $\lambda = \dfrac{r}{\varrho} = \dfrac{3r}{a} \Rightarrow \underline{\underline{a = 3\varrho}}$. Pitagorasz-tétel az FBC derékszögű háromszögre: $9\varrho^2 = \varrho^2 + (8r)^2 \Rightarrow \varrho = \underline{\underline{2\sqrt{2}\cdot r}} \Rightarrow a = \underline{\underline{6\sqrt{2}\cdot r}}$.

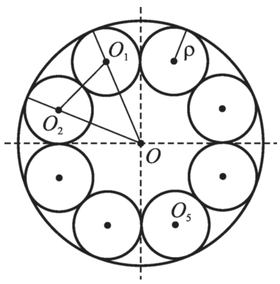
$A_{\text{kúp}} = \varrho^2\pi + \varrho\pi a = \underline{\underline{32r^2\pi}}$. $V_{\text{kúp}} = \dfrac{1}{3}\varrho^2\pi\cdot M = \underline{\underline{\dfrac{64}{3}r^3\pi}}$.

2218. A 2198. ábra jelölései szerint: $r\pi a = 3r^2\pi \Rightarrow \underline{\underline{a = 3r}}$. Az $ABC\triangle$ területe: $r\cdot M = (a+r)\cdot\varrho$. A feltételt felhasználva: $\underline{\underline{M = 4\varrho}}$.

2219. A két darabot szétszedve és az egyiket a tengelye körül 180°-kal elforgatva összeilleszthetők úgy, hogy együtt egyenes hengert alkossanak. Ennek a hengernek a térfogata megegyezik a könyökcső térfogatával. A henger alapkörének sugara r, magassága $a + b$. A keresett térfogat: $\underline{\underline{V = r^2\pi\cdot(a+b)}}$.

2220. 1. főkörmetszet: 2220/I. ábra. $OO_1 = OO_2 = R - \varrho$; $O_1O_2 = 2\varrho$; $O_1OO_2\sphericalangle = 45°$.

2220/I.

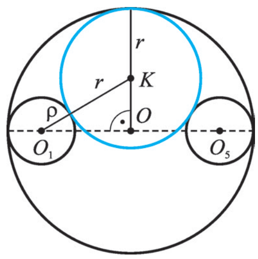


$\sin 22{,}5° = \dfrac{\varrho}{R-\varrho} \Rightarrow \varrho = \dfrac{R\sin 22{,}5°}{1+\sin 22{,}5°}$. A $\left|\sin\dfrac{\alpha}{2}\right| =$

$= \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ összefüggést felhasználva $\sin 22{,}5° = \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2}} =$

$= \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow \varrho = \underline{\underline{\dfrac{R\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}}$.

2220/II.

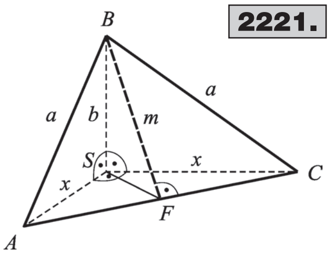


Az 1. főkörmetszetre merőleges a 2. főkörmetszet: 2220/II. ábra. $KO = R - r$; $KO_1 = r + \varrho$; $OO_1 = R - \varrho$. Pitagorasz-tétel az O_1OK derékszögű háromszögre: $(\varrho + r)^2 = (R-\varrho)^2 + (R-r)^2 \Rightarrow r = \dfrac{R(R-\varrho)}{R+\varrho}$.

A korábban ϱ-ra kapott összefüggést felhasználva: $R - \varrho =$ $= \dfrac{2R}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ és $R + \varrho = \dfrac{2R\left(1+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

II

2221.

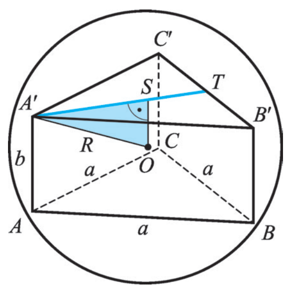


Ezeket felhasználva a megfelelő algebrai átalakítások után: $r = R\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{4-2\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}57R.$

2221. Bontsuk fel a tetraédert a beírt gömb középpontjából a csúcsokhoz vezető szakaszokkal négy tetraéderre. Ezeknek a tetraédereknek egy-egy lapja közös az eredeti tetraéderrel, magasságuk pedig a beírt gömb sugara, r. $\Rightarrow V = \frac{A \cdot r}{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow r = \frac{3V}{A}$. Pitagorasz-tétel az ASB derékszögű háromszögre: $x = \sqrt{a^2 - b^2}$. Pitagorasz-tétel az ASC derékszögű háromszögre: $AC = y = x\sqrt{2} = \sqrt{2(a^2 - b^2)}$.
ACB egyenlő szárú háromszögben BF magasság felezi az AC alapot. Pitagorasz-tétel a BFC derékszögű háromszögre: $a^2 = m^2 + \frac{y^2}{4}$. y-t behelyettesítve és a megfelelő átalakításokat elvégezve: $m = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. A tetraéder térfogata: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot b = \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{2} \cdot (a^2 - b^2)$. A tetraéder felszíne: $A = 2 \cdot \frac{xb}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y \cdot m}{2} = b\sqrt{a^2-b^2} + \frac{a^2-b^2}{2} + \frac{\sqrt{2(a^2-b^2)}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}{2}$.
A beírható gömb sugara a felszín és a térfogat összefüggés felhasználásával a megfelelő algebrai átalakítások után: $r = \frac{3V}{A} = \underline{\underline{\frac{b \cdot \sqrt{a^2-b^2}}{2b + \sqrt{a^2-b^2} + \sqrt{a^2+b^2}}}}$.

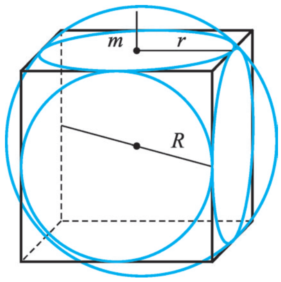
2222. A kocka köré írható gömb középpontja a testátlók metszéspontja, sugara a testátló fele: $R = \underline{\underline{a\frac{\sqrt{3}}{2}}}$. A kocka élfelezéspontjain átmenő gömb középpontja a testátlók metszéspontja, sugara a lapátló fele: $r = \underline{\underline{a\frac{\sqrt{2}}{2}}}$. A kocka beírt gömbjének középpontja a testátlók metszéspontja, sugara az él fele: $\varrho = \frac{a}{2}$; $R : r : \varrho = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a}{2} = \underline{\underline{\sqrt{3} : \sqrt{2} : 1}}$.

2223.



2223. $a \cdot b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. A szimmetria miatt $OS = \frac{1}{2}b$, ahol S az $A'B'C'$ háromszög középpontja. $A'B'C'$ szabályos háromszögben $A'T = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $A'S = \frac{2}{3}A'T =$ $= \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. $A'SO$ derékszögű háromszögben $A'O = R$; $A'S = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $OS = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{8}$. Pitagorasz-tétel az

2224/I.



II

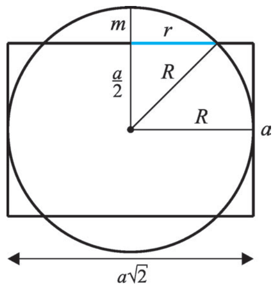
$A'SO$ derékszögű háromszögben: $\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=R^2\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{3a^2}{64}+\frac{3a^2}{9}=R^2\Rightarrow R^2=\frac{73a^2}{192}$. $\underline{\underline{\text{A gömb sugara}}}$ $R=\frac{\sqrt{73}\,a}{8\sqrt{3}}=$

$=\underline{\underline{\frac{\sqrt{219}\,a}{24}}}$.

2224. $V=V_{\text{gömb}}-6V_{\text{gömbsüveg}}$; $A=A_{\text{gömb}}-6P_{\text{gömbsüveg}}+6T_{\text{kör}}$.
Tekintsük az átlós metszetet!

2224/II.



$R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ és $r=\frac{a}{2}$ és $m=R-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}(\sqrt{2}-1)$.

$V_{\text{gömb}}=\frac{4R^3\pi}{3}=\frac{a^3\pi\sqrt{2}}{3}$ és

$V_{\text{gömbsüveg}}=\frac{\pi}{3}m^2(3R-m)=\frac{a^3\pi(4\sqrt{2}-5)}{24}$.

$\underline{\underline{V_{\text{dobókocka}}}}=\frac{a^3\pi\sqrt{2}}{3}-6\cdot\frac{a^3\pi(4\sqrt{2}-5)}{24}=\underline{\underline{\frac{a^3\pi(15-8\sqrt{2})}{12}}}$.

$A_{\text{gömb}}=4R^2\pi=2a^2\pi$ és $T_{\text{kör}}=r^2\pi=\frac{a^2\pi}{4}$ és

$P_{\text{gömbsüveg}}=2\pi Rm=\frac{a^2\pi(2-\sqrt{2})}{2}$.

$\underline{\underline{A_{\text{dobókocka}}}}=2a^2\pi-6\cdot\frac{a^2\pi(2-\sqrt{2})}{2}+6\cdot\frac{a^2\pi}{4}=\underline{\underline{\frac{a^2\pi(6\sqrt{2}-5)}{2}}}$.

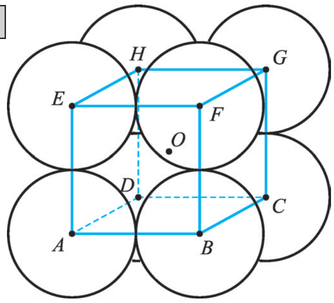
2225. A V térfogatú A felszínű gúlába írt gömb sugara $r=\frac{3V}{A}$; az oldallap területe

$$T_0=\frac{a\cdot\sqrt{M^2+\left(\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\right)^2}}{2},\quad V_{\text{gúla}}=\frac{1}{3}T_a\cdot M=\frac{1}{3}n\frac{a\cdot\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}}{2}\cdot M=\frac{nMa^2}{12\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\quad\text{és}$$

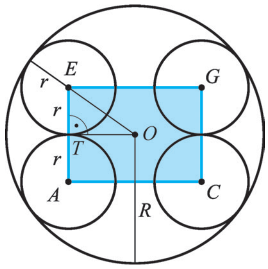
$$A_{\text{gúla}}=T_a+n\cdot T_0=n\cdot\frac{a\cdot\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}}{2}+n\cdot\frac{a\cdot\sqrt{M^2+\frac{a^2}{4\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}}}}{2}=\frac{na\left(a+\sqrt{4\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}\cdot M^2+a^2}\right)}{4\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}};$$

$$\underline{\underline{r}}=\frac{3V_{\text{gúla}}}{A_{\text{gúla}}}=\underline{\underline{\frac{M\cdot a}{a+\sqrt{4M^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}+a^2}}}}.$$

2227/I.



2227/II.



2226. $A_{\text{oktaéder}} = 8 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a = 5\ \text{cm} = R. \Rightarrow \underline{\underline{A_{\text{gömb}}}} \approx \underline{\underline{314\ \text{cm}^2}}$ és $\underline{\underline{V_{\text{gömb}}}} \approx \underline{\underline{523,6\ \text{cm}^3}}$.

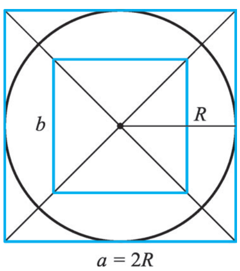
2227. A középpontok egy $2r$ oldalú kocka csúcsai $\Rightarrow AC = 2r\sqrt{2}$. Tekintsük az átlós síkmetszetet! ETO derékszögű háromszögben $ET = r$; $OT = \dfrac{1}{2}AC = r\sqrt{2}$; $OE = R - r$. Pitagorasz-tétel az ETO derékszögű háromszögre: $r^2 + (r\sqrt{2})^2 = (R-r)^2 \Rightarrow 2r^2 + 2Rr - R^2 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow r_{1,2} = \dfrac{-2R \pm 2\sqrt{3}R}{4}$. A másodfokú egyenlet pozitív megoldása a gömb sugara $\underline{\underline{r = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}R}}$.

2228. Legyen a külső kocka éle a, a belső kocka éle b, a gömb sugara R. Tekintsük a négy él felezőpontjára illeszkedő síkmetszetet és az átlós síkmetszetet: $a = 2R$; $\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$. A feladat adatai szerint $a - b = d \Rightarrow 2R - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R = d \Rightarrow \underline{\underline{R}} = \dfrac{d}{2\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)} =$

$= \underline{\underline{\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}d}}$; $\underline{\underline{a = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}d}}$; $\underline{\underline{b}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)}{4}d = \underline{\underline{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}d}}$.

2228/I.



2228/II.